Решения первого тура, Junior Pro

№1. Назару нужно решить упражнение на сложение двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где a, b, c, d — некоторые ненулевые действительные числа. Но вместо суммирования он выполнил умножение. Удивительно, но ответ Назара совпадает с правильным ответом на данное упражнение. Найдите значение $\frac{b}{a} + \frac{d}{c}$.

Ответ. 1.

Решение. Из $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, получаем $ad + bc = ac \Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = 1$.

№2. См. задача 1 Senior Pro лиги.

№3. См. задача 2 Senior Pro лиги.

№4. На сторонах BC, CA, AB соответственно треугольника ABC, в котором угол C прямой, выбраны точки D, E, F такие, что $\angle DAB = \angle CBE$ и $\angle BEC = \angle AEF$. Докажите, что $DB = DF$.

Решение. Отразим точку B относительно AC в точку B', тогда FE проходит через B', так как $\angle B'EC = \angle CEB = \angle AEF$, где второе равенство из за симметрии. Теперь, $\angle FB'C = \angle EBC = \angle DAF$, откуда точки F, D, B', A лежат на одной окружности, откуда получаем, что $\angle DBA = \angle AB'D = \angle DFB$, где второе равенство из симметрии, откуда $DF = DB$, что и требовалось.

№5. См. задача 3 Senior Pro лиги.

№6. См. задача 4 Senior Pro лиги.

Решения второго тура, Junior Pro

№1. См. задача 1 Senior Pro лиги.

№2. Целые ненулевые числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{c}+\frac{d}{a},$$

причем эти четыре дроби несократимы, не являются целыми числами и необязательно положительны. Найдите $ad+bc$.

Ответ. 0.

Решение. Домножив на знаменатели, получим равенство

$$a^2cd+abc^2=(ad+bc)ac=(ab+cd)bd=ab^2d+bcd^2.$$

Стало быть,

$$bcd^2=a^2cd+abc^2-ab^2d,$$

что делится на a. По условию дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{d}{a}$ несократимы, поэтому числа b и d взаимно просты с a. Следовательно, c делится на a. Аналогично устанавливаем, что a делится на c. Таким образом, числа a и c делятся друг на друга и, значит, $a=\pm c$. Из тех же соображений получаем, что $b=\pm d$. Если в равенствах $a=\pm cb=\pm d$ знаки расставлены противоположным образом, то $ad+bc=0$. Рассмотрим теперь случай, когда знаки расставлены одинаково. Тогда

$$2\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{c}+\frac{d}{a}=\pm 2\cdot\frac{d}{c}$$

Поэтому $\frac{c^2}{d^2}=\pm 1$. Знак минус невозможен, а знак плюс означает, что $c=\pm d$ и, следовательно, дробь $\frac{c}{d}$ равна ± 1, что невозможно по условию.

№3. См. задача 2 Senior Pro лиги.

№4. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), в которой $AD > BC$. На ее описанной окружности отмечена такая точка E, что $BE \perp AD$. Докажите, что $AE+BC>DE$.

Решение. Обозначим через H точку пересечения отрезков AD и BE. Отметим на луче DA такую точку K, что $KD=BC$. Тогда четырехугольник $KBCD$ является параллелограммом и, значит, $KB=CD$. Но по условию $AB=CD$, поэтому $AB=BK$. Таким образом, BH — высота равнобедренного треугольника ABK. Тогда она является медианой и, значит, $AH=HK$. Отсюда следует, что треугольники AEH и KEH равны (по двум сторонам и углу между ними). Стало быть, $AE=KE$. Осталось лишь заметить, что по неравенству треугольника $DE<DK+KE=BC+AE$.

№5. См. задача 4 Senior Pro лиги.

№6. Санши и Байсал прилетели в город, главной достопримечательностью которого являются 2023 скамейки, некоторые пары которых связаны маршрутами кублита в две стороны. Они путешествуют, играя. Сначала Санши выбирает скамейку, на которую они приезжают. Затем они путешествуют вместе на кублитах, по очереди выбирая скамейку, на которой еще не были (первый раз выбирает Байсал). Кто не сможет выбрать скамейку, проиграл. Докажите, что Санши может выиграть.

Решение. Назовём паросочетанием разбиение города на пары скамеек, соединённых маршрутом кублита, и отдельные скамейки. Рассмотрим максимальное паросочетание (с наибольшим числом пар). Приедем на какую-нибудь отдельную скамейку (такая очевидно есть, так как всего нечетное). Если Байсал ходит на скамейку из какой-то пары, Санши отвечает ходом на вторую скамейку этой пары. Предположим, что Байсалу удастся сделать ход на отдельную скамейку. Путь с начала до этой скамейки состоит из чётного числа $2k$ островов: из $k-1$ пары и двух отдельных скамеек. Но этот путь можно было разбить на k пар, что увеличило бы паросочетание. Противоречие. Значит, ход Байсала на отдельную скамейку невозможен, и Санши выиграет.

Решения третьего тура, Junior Pro

№1. См. задача 1 Senior Pro лиги.

№2. Найдётся ли такое десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырёхзначное число?

Ответ. Найдется.

Решение. Таково, например, число 1397245680. В самом деле, если не вычеркнута хотя бы одна из последних шести цифр, то оставшееся четырёхзначное число чётно или делится на 5, а если все они вычеркнуты, то осталось число 1397, кратное 11.

№3. Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b будем обозначать (a, b). Пусть натуральное число n таково, что $(n, n+1) < (n, n+2) < \ldots < (n, n+35)$. Докажите, что $(n, n+35) < (n, n+36)$.

Решение. Заметим, что $(n, n+k) = (n, k) \le k$, то есть $(n, n+1) \le 1$, $(n, n+2) \le 2, \ldots, (n, n+35) \le 35$. Поэтому неравенства из условия задачи могут выполняться тогда и только тогда, когда $(n, n+1) = 1, (n, n+2) = 2, \ldots, (n, n+35) = 35$. Но тогда $(n, n+4) = 4, (n, n+9) = 9$, то есть n делится на $4 \cdot 9 = 36$, откуда $(n, n+36) = 36 > 35 = (n, n+35)$.

№4. См. задача 2 Senior Pro лиги.

№5. См. задача 4 Senior Pro лиги.

№6. Докажите, что найдутся четыре таких целых числа a, b, c, d, по модулю больших 2023^{2023}, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}$.

Решение. Рассмотрим какое-нибудь натуральное число $n > 2023^{2023}$. Покажем, что условию будет удовлетворять четверка чисел $a = -n$, $b = 1 - a$, $c = 1 - ab$, $d = 1 - abc$. Действительно, применив трижды соотношение $\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a(1-a)}$, получаем $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abc} + \frac{1}{1-abc} = \frac{1}{abcd}$.

Решения четвертого тура, Junior Pro

№1. Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

Ответ. 11.

Решение. *Оценка.* Все стулья одновременно занять невозможно, так как в тот момент, когда сядет человек на последний незанятый стул, один из его соседей встанет. Следовательно, одновременно сидящих может быть не больше чем 11.

Пример. Покажем, как посадить 11 человек. Пронумеруем стулья числами от 1 до 12. Первый стул занять легко. Второй стул займем в два этапа. На первом этапе человек садится на третий стул, а на втором этапе посадим человека на второй стул, а сидящий на третьем стуле встанет. Дальше действуем аналогично: если заняты стулья с номерами от 1 до k, то сначала посадим человека на стул с номером $k+2$, а затем посадим на стул с номером $k+1$, освобождая при этом стул с номером $k+2$. После того как эта операция будет проделана для всех k от 1 до 10, стулья с номерами от 1 до 11 будут заняты, а двенадцатый стул – свободен.

№2. См. задача 1 Senior Pro лиги.

№3. См. задача 2 Senior Pro лиги.

№4. См. задача 3 Senior Pro лиги.

№5. Сумма цифр натурального числа N равна 2023. Может ли сумма цифр числа N^3 равняться 2023^3?

Ответ. Могла.

Решение. Рассмотрим многочлен $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{2023})^3$. Каждый из его коэффициентов равен 1, 3 или 6, а сумма коэффициентов равна 2023^3 (она получается, когда мы все переменные заменим единицами). Если вместо x_k подставить 10^{p_k} так, что всем одночленам соответствуют разные степени десятки, то наши коэффициенты превратятся в цифры числа $(10^{p_1} + ... + 10^{p_{2023}})^3$. Требуемое условие выполняется, если $p_{k+1} > 3p_k$ ($k = 0, ..., 99,\ p_0 = 0$). Действительно, пусть $i \geq j \geq k$, $l \geq m \geq n$, $i > l$. Одночлену $x_i x_j x_k$ соответствует $10^{p_i+p_j+p_k} > 10^{p_i} > 10^{3p_l} > 10^{p_l+p_m+p_n}$, что соответствует одночлену $x_l x_m x_n$. Можно взять $p_i = 4^i$

№6. См. задача 5 Senior Pro лиги.

Решения финального тура, Junior Pro

№1. В вершинах 33-угольника записали в некотором порядке целые числа от 1 до 33. Затем на каждой стороне написали сумму чисел в её концах. Могут ли на сторонах оказаться 33 последовательных целых числа (в каком-нибудь порядке)?

Ответ. Могло.

Решение. Пусть в вершинах числа идут в таком порядке: 1, 18, 2, 19, 3, 20, ..., 16, 33, 17. Нетрудно убедиться, что суммы двух соседних чисел будут возрастать по порядку от 19 до 50. А сумма первого и последнего равна 18.

№2. В классе учится 30 учеников, один из них — Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно 5 общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечетным числом друзей.

Решение. Поделим учеников на Васю, Васиных друзей, а также на остальных. Пусть у всех четное число друзей, тогда в множестве остальных будет нечетное число людей, тогда среди них найдется человек с четным числом друзей внутри этой группы, но вне этой группы он дружит только с друзьями Васи, причем ровно с 5 из них, то есть всего у него нечетное число дружб.

№3. Пусть натуральное число a *хорошее*, если число простых делителей a равно 2. Существуют ли 18 последовательных хороших натуральных чисел?

Ответ. Не могут.

Решение. Предположим, что нашлись 18 хороших чисел подряд. Среди них найдутся три числа, делящихся на 6. Пусть это числа $6n$, $6(n+1)$ и $6(n+2)$. Поскольку эти числа – хорошие, и в разложение каждого из них на простые множители входят двойка и тройка, других простых делителей у них быть не может. Лишь одно из трёх подряд идущих натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ может делиться на 3. Значит, остальные два являются степенями двойки. Но пары степеней двойки, отличающихся не более чем на два, – это только $(1,2)$ и $(2,4)$; поэтому $n \leq 2$. Однако тогда среди наших 18 чисел есть простое число 13 (так как $6n \leq 13 \leq 6(n+2)$), не являющееся хорошим. Противоречие.

№4. См. задача 1 Senior Pro лиги.

№5. В комнате 2023 мальчик и 2023 девочек. Каждый мальчик дружит ровно с двумя различными девочками. Пусть N - количество способов разбить мальчиков и девочек на пары друзей. Найдите все возможные значения N.

Ответ. 0, 2^i, $1 \leq i \leq 1011$

Решение. Во первых, $N = 0$ - возможно. Пусть все мальчики дружат с одной и той же парой девочек. Пусть теперь $N \neq 0$. Пусть какая то девочка связана только с одним мальчиком, тогда мы обязаны выбрать именно их, и не влияет на возможности для оставшихся людей. Рассмотрим теперь ту часть графа (заведем двудольный граф, где вершины первой доли - мальчики, а второй - девочки) где степень каждой вершины 2. Тогда граф разобьется на циклы четной длины хотя бы 4. В каждом цикле будет два варианта как взять ребра, то есть общее количество вариантов $2^{\text{кол-во циклов}}$. Но кол-во циклов $\leq \lfloor \frac{2023}{2} \rfloor = 1011$.

№6. Положительные числа a,b,c таковы, что $\frac{3a}{b+c} \geq \frac{2b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$. Докажите, что тогда $\frac{3\sqrt{a}}{b+c} \geq \frac{2\sqrt{b}}{a+c} + \frac{\sqrt{c}}{b+a}$.

Решение. прибавим 3 к обоим частям изначального и поделим на скобки, как $3(\frac{a}{b+c}+1) \geq 2(\frac{b}{a+c}+1) + (\frac{c}{a+b}+1)$, далее можем перенести в числитель и поделить на $a+b+c$ в каждой скобке , тогда

$\frac{3}{b+c} \geq \frac{2}{a+c} + \frac{1}{a+b}$. Перемножив с предыдущим и применив КБШ, выйдет $\frac{9a}{b+c} \geq (\frac{2\sqrt{b}}{a+c} + \frac{\sqrt{c}}{a+b})^2$, а это то, что нужно.

№7. Высоты AA_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка Q симметрична середине стороны AC относительно AA_1. Точка P – середина отрезка A_1C_1. Докажите, что $\angle QPH = 90°$.

Решение. Пусть L – середина AA_1. Тогда PL – средняя линия треугольника AA_1C_1, поэтому $PLH = \angle BAA1$ и, следовательно, $\angle PLQ = 90° - \angle PLH = \angle C1HA$. С другой стороны, точки A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC, поэтому треугольники A_1C_1H и CAH подобны. Значит, их медианы HP и HK образуют равные углы со сторонами HC_1 и HA соответственно. Отсюда $\angle QHA = \angle KHA = \angle PHC_1$, и поэтому $\angle PHQ = \angle C1HA = \angle PLQ$. Следовательно, точки P, Q, L, H лежат на одной окружности и $\angle QPH = 180° - \angle QLH = 90°$.

№8. См. задача 6 Senior Pro лиги.